1 Vollständige Induktion

Aufgabe 1)

$$\forall n \geq 1 \text{ gilt} : 3^{2n+4} - 2^{n-1} \text{ ist durch 7 teilbar}$$

Induktionsanfang:
Es gilt $3^{2 \cdot 1+4} - 2^{1-1} = 728 = 7 \cdot 104$.
Die Behauptung stimmt somit für $n = 1$

Induktionsschritt:
Die Aussage gelte für $n \geq 1$ beliebig, also $3^{2n+4} - 2^{n-1} = 7m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+4} - 2^{(n+1)-1} &= 3^{2n+4} \cdot 9 - 2^n \\
&= (7m + 2^{n-1}) \cdot 9 - 2^n \\
&= 7 \cdot 9m + 9 \cdot 2^{n-1} - 2^n \\
&= 7 \cdot 9m + (9-2) \cdot 2^{n-1} \\
&= 7 \cdot (9m + 2^{n-1})
\end{aligned}$$

Da gilt $9m+2^{n-1} \in \mathbb{N}$, ist $3^{2(n+1)+4}-2^{(n+1)-1}$ durch 7 teilbar. Die Behauptung ist somit bewiesen.

Aufgabe 2)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

Induktionsanfang:
Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{1}{k} = 1-1 = 0$.
Die Behauptung ist somit für $n=1$ erfüllt.

Induktionsschritt:
Es gelte $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ für ein $n \geq 1$ beliebig. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\cdot\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k-1}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\right)+(-1)^{n+1}\cdot\binom{n}{n+1}+\left(\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k-1}\right)+(-1)^0\cdot\binom{n}{-1}\\
&= 0+0+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k-1}+0\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\\
&= -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist somit bewiesen.

Aufgabe 3)

$$\forall n \text{ gilt} : \frac{2}{3}n + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}n^4 \ \in \mathbb{Z}$$

Die Behauptung ist äquivalent dazu, dass 12 ein Teiler von $8n+3n^2-2n^3+3n^4$ ist.

Induktionsanfang:
Es gilt $8 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^4 = 12 = 12 \cdot 1$.
Die Behauptung ist somit für $n = 1$ erfüllt.

Induktionsschritt:
Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$, also $8n + 3n^2 - 2n^3 + 3n^4 = 12m$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$ beliebig. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&8(n+1) + 3(n+1)^2 - 2(n+1)^3 + 3(n+1)^4 \\
&= 3n^4 + 10n^3 + 15n^2 + 20n + 12 \\
&= (3n^4 - 2n^3 + 15n^2 + 20n + 12) + 12n^3 + 12n^2 + 12n + 12 \\
&= 12m + 12(n^3 + n^2 + n + 1) \\
&= 12(m + n^3 + n^2 + n + 1) \\
&= 12m'
\end{aligned}$$

Da gilt $m' \in \mathbb{N}$ ist $8(n+1)+3(n+1)^2-2(n+1)^3+3(n+1)^4$ durch 12 teilbar. Die Behauptung ist somit bewiesen.

Aufgabe 4)

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = 2-\frac{1}{n+1}$$

Induktionsanfang:
Es gilt $\prod\limits_{k=1}^{1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = 1+\frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 2-\frac{1}{1+1}$.
Die Behauptung ist somit für $n=1$ erfüllt.

Induktionsschritt:
Es gelte $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = 2-\frac{1}{n+1}$ für $n \geq 1$ beliebig. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1+k}\right) &= \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+1+k}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{n+1+n+1}\right)\\
&= \left[\prod_{k=2}^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)\\
&= \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]\cdot\left(\frac{2n+2+1}{2n+2}\right)\\
&= \left[\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2}\right]\cdot\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)(n+1)(2n+3)}{(n+1)(2n+1)(n+2)(2n+2)}\\
&= \frac{2n+3}{n+2}\\
&= \frac{2n+4}{n+2}-\frac{1}{n+2}\\
&= 2-\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Dies ist der Ausdruck, welcher sich für $n+1$ ergeben muss. Die Behauptung ist somit bewiesen.

Aufgabe 5)

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \ \forall n \geq 2$$

Induktionsanfang:
Es gilt: $\frac{4^2}{2+1} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} < 6 = \frac{24}{4} = \frac{(2*2)!}{(2!)^2}$.
Die Behauptung gilt also für $n = 2$.

Vorüberlegung:

$$2n^2+4n+2 < 2n^2+5n+2 \Rightarrow 2(n+1)^2 < (2n+1)(n+2) \Rightarrow \frac{2(n+1)}{n+2} < \frac{2n+1}{n+1}$$

Induktionsschritt:
Es gelte $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ für ein $n \geq 2$ beliebig. Daraus folgt unter Verwendung der Vorüberlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{4^{n+1}}{n+2} &= \frac{4 \cdot 4^n}{n+2} \\
&= \frac{4^n}{n+1} \cdot 2 \cdot \frac{2(n+1)}{n+2} \\
&< \frac{4^n}{n+1} \cdot 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \\
&< \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+1} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \\
&= \frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}
\end{aligned}$$

Dies ist der Ausdruck der sich für $n+1$ ergeben muss. Die Behauptung ist somit bewiesen.

Aufgabe 6)

Eine Ebene kann durch n Geraden maximal in $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegt werden.

Induktionsanfang:
Existiert keine Gerade, so ist $n = 0$. Die Ebene wird daher nicht geteilt und es gibt nur ein Gebiet. Außerdem gilt $\frac{0^2+0+2}{2} = 1$. Die Behauptung ist also für den Fall $n = 0$ erfüllt.

Induktionsschritt:
Es gelte, dass für ein $n \geq 0$ beliebig n Geraden ein Gebiet in höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegen können. Die $(n + 1) - te$ Gerade kann die schon vorhandenen Geraden jeweils maximal einmal schneiden. Die neue Gerade verläuft maximal durch $n+1$ Gebiete. Diese werden dadurch dann jeweils in 2 Teilgebiete aufgeteilt. Es können also also maximal $n + 1$ Gebiete dazukommen. Daraus ergibt sich für die Maximalzahl der Gebiete bei $n + 1$ Geraden:

$$\begin{aligned}\frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 &= \frac{n^2+3n+4}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}\end{aligned}$$

Die Behauptung ist somit bewiesen.

2 Gleichungen, Ungleichungen

Aufgabe 1)

$$|x+2| \leq |x-1|$$

Anhand der Definition des Absolutbetrags ergeben sich folgende mögliche Fälle:

$$\begin{aligned} x+2 &\leq x-1 && \text{für } x \geq -2,\ x \geq 1 \\ -(x+2) &\leq x-1 && \text{für } x < -2,\ x \geq 1 \\ -(x+2) &\leq -(x-1) && \text{für } x < -2,\ x < 1 \\ x+2 &\leq -(x-1) && \text{für } x \geq -2,\ x < 1 \end{aligned}$$

Fall 1 entfällt, da aus ihm der Widerspruch $2 \leq -1$ folgt. Fall 2 entfällt, da die beiden Bedingungen an x nicht gleichzeitig erfüllbar sind. Aus Fall 3 folgt $x < -2$. Aus Fall 4 folgt $x \leq -\frac{1}{2}$ für $x \geq -2$, $x < 1$, also $x \leq -\frac{1}{2}$. Durch die Kombination dieser beiden Ergebnisse erhält man, dass die Gleichung durch alle $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ erfüllt wird.

Aufgabe 2)

$$|2 - |x+1|| \leq 1$$

Anhand der Definition des Absolutbetrags ergeben sich folgende Fälle für den inneren Betrag:

$$\begin{aligned} |2-(x+1)| &= |1-x| \leq 1 && \text{für } x \geq -1 \\ |2+(x+1)| &= |3+x| \leq 1 && \text{für } x < -1 \end{aligned}$$

Die weitere Fallunterscheidung liefert:

$$\begin{aligned} 1 - x &\leq 1 && \text{für } x \geq -1,\ x \leq 1 \\ -1 + x &\leq 1 && \text{für } x \geq -1,\ x > 1 \\ 3 + x &\leq 1 && \text{für } x < -1,\ x \geq -3 \\ -3 - x &\leq 1 && \text{für } x < -1,\ x < -3 \end{aligned}$$

Das führt auf die Bedingungen:

$$\begin{aligned} &x \in [0; 1] \\ &x \in (1; 2] \\ &x \in [-3; -2] \\ &x \in [-4, -3) \end{aligned}$$

Die Ungleichung wird daher von allen $x \in [-4; -2] \cup [0; 2]$ gelöst.

Aufgabe 3)

$$\frac{|1 - x|}{x + 3} \geq -2$$

Aus der Fallunterscheidung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1 - x}{x + 3} &\geq -2 && \text{für } x \leq 1 \\ \frac{-1 + x}{x + 3} &\geq -2 && \text{für } x > 1 \end{aligned}$$

Zusätzlich ist zu beachten, dass der Fall $x = -3$ nicht definiert ist. Auch ist bei Umformungen das Vorzeichen des Terms $x + 3$ zu beachten. Es folgt daher:

$$\begin{aligned} 1 - x &\leq -2x - 6 && \text{für } x < -3 \\ 1 - x &\geq -2x - 6 && \text{für } x > -3,\ x \leq 1 \\ x - 1 &\geq -2x - 6 && \text{für } x > 1 \end{aligned}$$

Daraus folgen die Teilkomponenten: $x \leq -7$, $x \in (-3;1]$ und $x > 1$. Die Ungleichung wird also durch alle x mit $x \in (-\infty;-7] \cup (-3;\infty)$ gelöst.

Aufgabe 4)

$$\frac{3|x-2|}{3x-2} < -2$$

Eine Fallunterscheidung führt auf:

$$\begin{aligned} -3x+6 &< -6x+4 \qquad \text{für } x \geq \frac{2}{3},\ x < 2 \\ 3x-6 &< -6x+4 \qquad \text{für } x \geq \frac{2}{3},\ x \geq 2 \\ -3x+6 &> -6x+4 \qquad \text{für } x < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass der Fall $x = \frac{2}{3}$ nicht definiert ist. Es folgen somit folgende Bedingungen für x:

$$\begin{aligned} x &< -\frac{2}{3} \qquad \text{für } x \geq \frac{2}{3},\ x < 2 \lightning \\ x &< \frac{10}{9} \qquad \text{für } x \geq \frac{2}{3},\ x \geq 2 \lightning \\ x &> -\frac{2}{3} \qquad \text{für } x < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die Ungleichung wird somit von allen $x \in \left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ gelöst.

Aufgabe 5)

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$\forall x > 0$ gilt $0 \leq \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - 2 + \frac{1}{x}$. Die Gleichheit ist für den Fall $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ gegeben. Daraus folgt, dass die Gleichung nur für $x = 1$ erfüllt ist.

Aufgabe 6)

$$\frac{4i-2}{3-i} = z^2$$

Umformung der linken Seite führt auf:

$$\begin{aligned}\frac{4i-2}{3-i} &= \frac{(4i-2)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)}\\ &= \frac{10i-10}{10}\\ &= -1+i\end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Beziehung $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$ ergibt sich $|z^2| = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Also gilt:

$$z^2 = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

Somit ergibt sich für z unter Verwendung der Periodizität:

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt[4]{2}e^{\frac{3}{8}\pi i}\\ z_2 &= \sqrt[4]{2}e^{\frac{11}{8}\pi i}\end{aligned}$$

Aufgabe 7)

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

Die Lösung kann äquivalent zu einer quadratischen Gleichung in $\mathbb{R}$ gefunden werden.

$$\begin{aligned}z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 + 4 &= 0\\ \Leftrightarrow\ (z+1)^2 &= -4\\ \Leftrightarrow\ z+1 &= \pm 2i\\ \Leftrightarrow\ z &= -1 \pm 2i\end{aligned}$$

Aufgabe 8)

$$|z - i| = |z + 1| = 1$$

Für die Lösung betrachten wir zunächst die Gleichung $|z - i| = |z + 1|$ mit $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|z - i| = |z + 1| &\Leftrightarrow |a + bi - i| = |a + bi + 1| \\
&\Leftrightarrow |a + (b - 1)i| = |(a + 1) + bi| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{(a + 1)^2 + b^2}| \\
&\Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = (a + 1)^2 + b^2 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + 2a + 1 + b^2 \\
&\Leftrightarrow -b = a \\
&\Rightarrow Re(z) = -Im(z)
\end{aligned}$$

Jetzt muss noch die Gleichheit mit 1 betrachtet werden. Dafür verwenden wir $|z + 1| = 1$. $|z - i| = 1$ kann aber genauso verwendet werden.

$$\begin{aligned}
|z + 1| = 1 &\Leftrightarrow |a + bi + 1| = 1 \\
&\Leftrightarrow |a - ai + 1| = 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(a + 1)^2 + (-a)^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + 2a + 1} = 1 \\
&\Leftrightarrow 2a^2 + 2a + 1 = 1 \\
&\Leftrightarrow a(a + 1) = 0 \\
&\Rightarrow a_1 = 0, \quad a_2 = -1 \\
&\Rightarrow z_1 = 0, \quad z_2 = -1 + i
\end{aligned}$$

Die Gleichung wird also nur durch $z_1 = 0$ und $z_2 = -1 + i$ gelöst.

Aufgabe 9)

$$\left|\frac{z - i}{z + i}\right| \leq 1$$

Die Lösung lässt sich ohne eine Fallunterscheidung ermitteln:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z-i}{z+i}\right| \leq 1 &\Leftrightarrow |z-i| \leq |z+i| \\
&\Leftrightarrow |z-i|^2 \leq |z+i|^2 \\
&\Leftrightarrow (z-i)(\overline{z-i}) \leq (z+i)(\overline{z+i}) \\
&\Leftrightarrow (z-i)(\overline{z}+i) \leq (z+i)(\overline{z}-i) \\
&\Leftrightarrow z\overline{z} - i\overline{z} + iz + 1 \leq z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1 \\
&\Leftrightarrow i(z-\overline{z}) \leq -i(z-\overline{z} \qquad |z-\overline{z} = 2iIm(z) \\
&\Leftrightarrow -2Im(z) \leq 2Im(z) \\
&\Leftrightarrow 0 \leq Im(z)
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge entspricht also der oberen Halbebene der Gauß'schen Zahlenebene inklusive der reellen Achse.

3 Komplexe Zahlenebene

$M_1 = \{|z-4-6i| = |z+2-4i|\}$

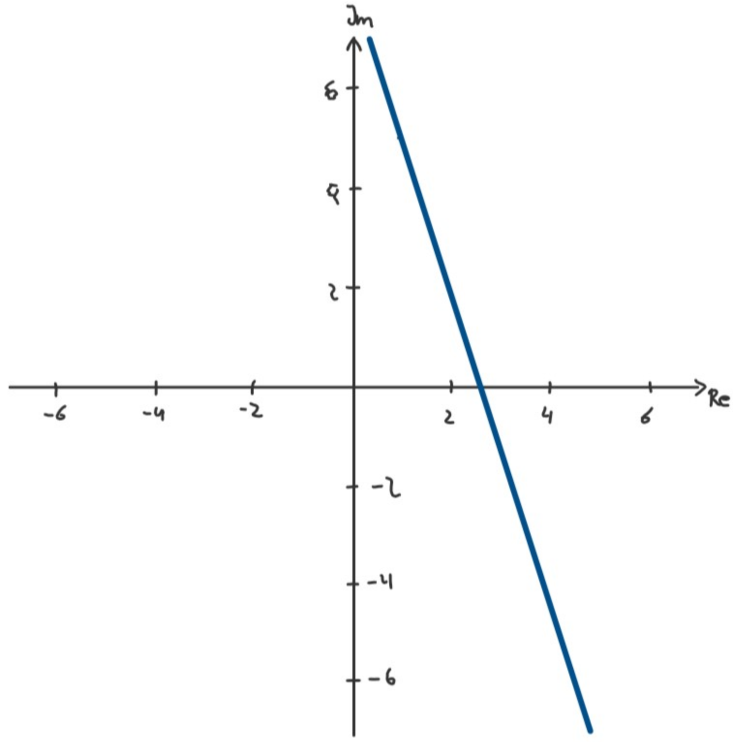

Abbildung 1: $M_1 = \{|z-4-6i| = |z+2-4i|\}$

Die gegebene Menge beinhaltet alle Punkte, die den gleichen Abstand zu den Punkten $z_1 = 4+6i$ und $z_2 = -2+4i$ haben. Geometrisch findet man diese, indem man die beiden Punkte sowie die Verbindungsstrecke zwischen ihnen einzeichnet. Auf dieser wird dann die Mittelsenkrechte konstruiert. Diese Mittelsenkrechte ist die Gerade, die die Menge M_1 darstellt.

$M_2 = \{|Im(z)| < 1 \wedge |z| \geq \frac{1}{2}\}$

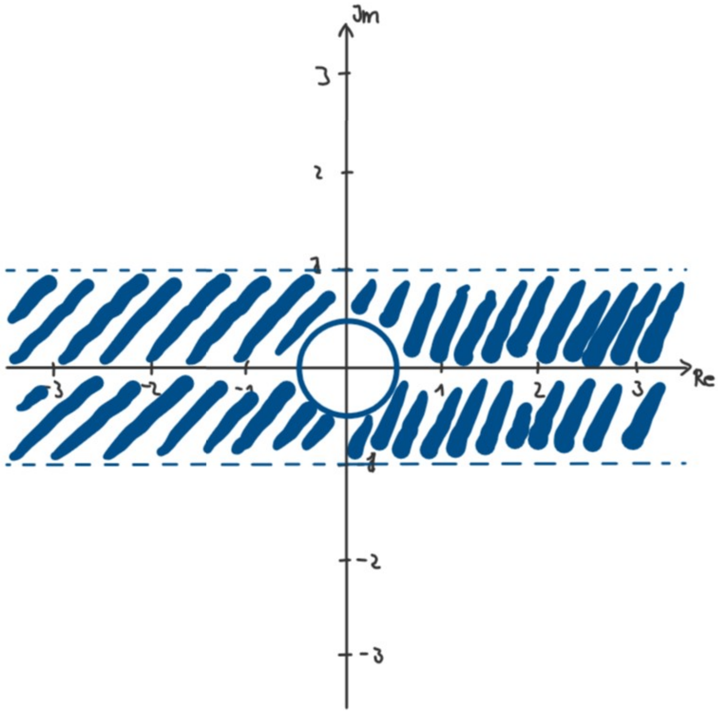

Abbildung 2: $M_2 = \{|Im(z)| < 1 \wedge |z| \geq \frac{1}{2}\}$

Durch $|z| \leq \frac{1}{2}$ ist eine Kreisfläche mit Radius $\frac{1}{2}$ um 0 exklusive der Kreislinie ausgespart. Diese begrenzende Kreislinie gehört somit zur Menge M_2. $Im(z) <$ 1 definiert den Bereich $-1 < b < 1$ in horizontaler Richtung.

$M_3 = \{|z-1| = |z+1|\}$

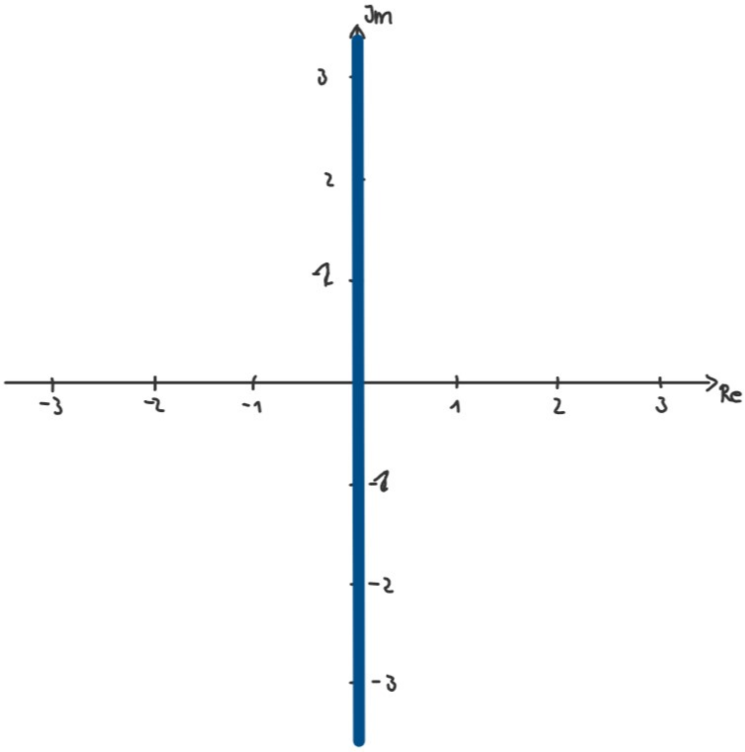

Abbildung 3: $M_3 = \{|z-1| = |z+1|\}$

Die Menge besteht aus allen Punkten, die zu $z_1 = 1$ und $z_2 = -1$ den gleichen Abstand haben. Mit dem analogen Vorgehen wie bei Menge M_1 ergibt sich die Menge M_3 als die imaginäre Achse.

$M_4 = \{1 < |z - i| < 2\}$

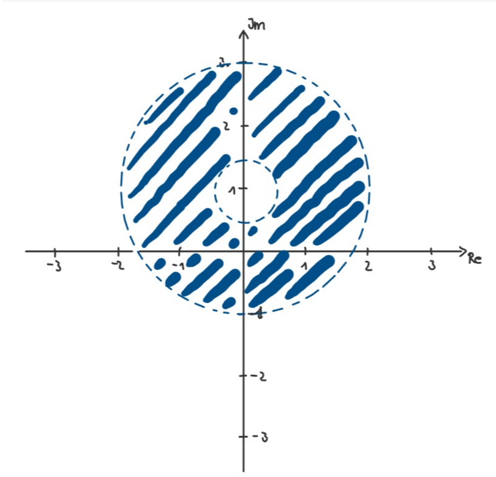

Abbildung 4: $M_4 = \{1 < |z - i| < 2\}$

Durch $1 < |z-i|$ wird eine Kreisfläche mit Mittelpunkt i und Radius 1 inklusive der Kreislinie ausgespart. Diese Fläche gehört nicht mit zur Menge. Durch $|z - i| < 2$ wird eine Kreisfläche mit Mittelpunkt i und Radius 2 exklusive der Kreislinie beschrieben, welche Teil der Menge ist. Durch die Kombination dieser beiden Bedingungen ergibt sich die Menge M_5 als ein Kreisring mit Innenradius 1, Außenradius 2 und Mittelpunkt i, wobei die Begrenzungslinien nicht mit dazuzählen.

$M_5 = \{|z| \geq 1 \wedge |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \wedge Im(z) > 0\}$

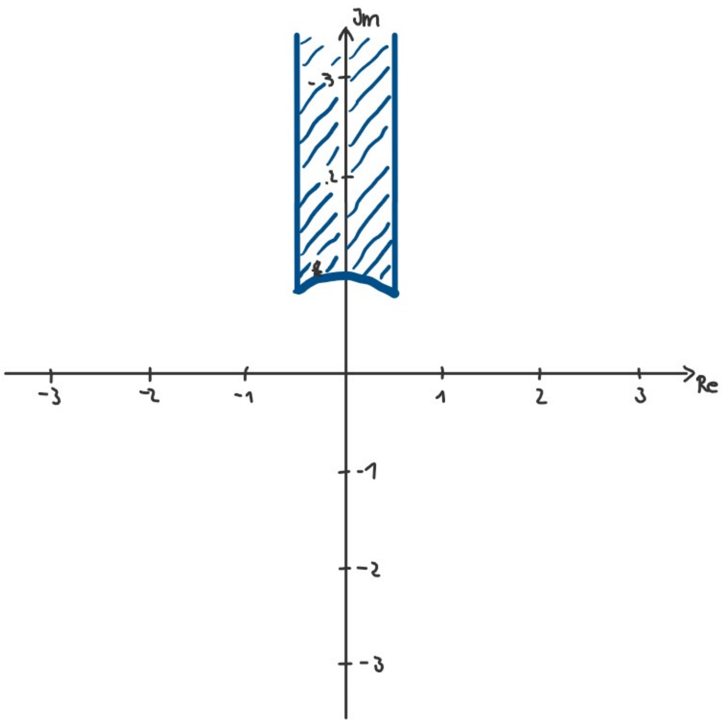

Abbildung 5: $M_5 = \{|z| \geq 1 \wedge |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \wedge Im(z) > 0\}$

$|Re(z)| \leq \frac{1}{2}$ ist der Bereich, in der oberen und unteren Halbebene welcher seitlich durch $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_2 = -\frac{1}{2}$ begrenzt wird. Durch die Bedingung $Im(z) > 0$ werden untere Halbebene und reelle Achse aus diesem Bereich exkludiert. $|z| \geq 1$ exkludiert zusätzlich noch eine Kreisfläche ohne die Begrenzungslinie mit Radius 1 um den Nullpunkt.

M_6

$M_6 = \{|z - z_0| \leq r\}$ für $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ fest

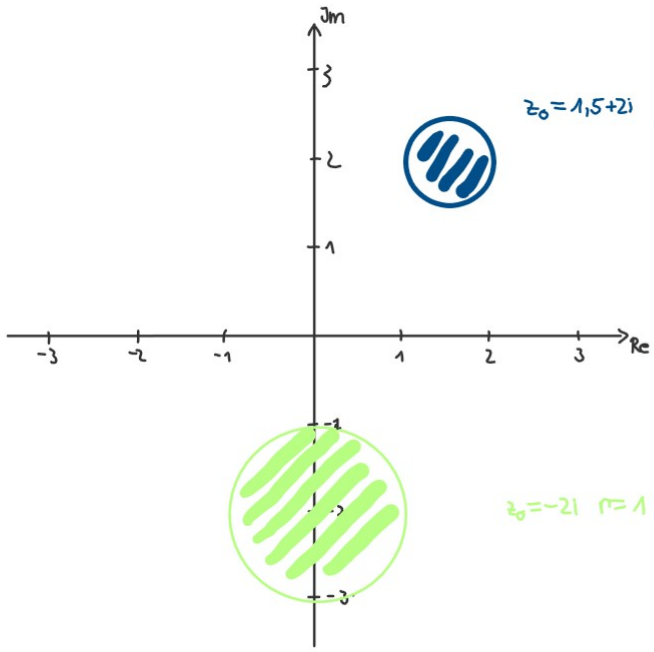

Abbildung 6: $M_6 = \{|z - z_0| \leq r\}$ für $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ fest (Beispiele)

Die Menge M_6 ist eine Kreisfläche inklusive der Begrenzungslinie mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Bespiele dafür sind in der Skizze zu sehen.

M_7

$M_7 = \{\frac{|z-i|}{|z+i|} \leq 1 \wedge |z-4| \leq 3\}$

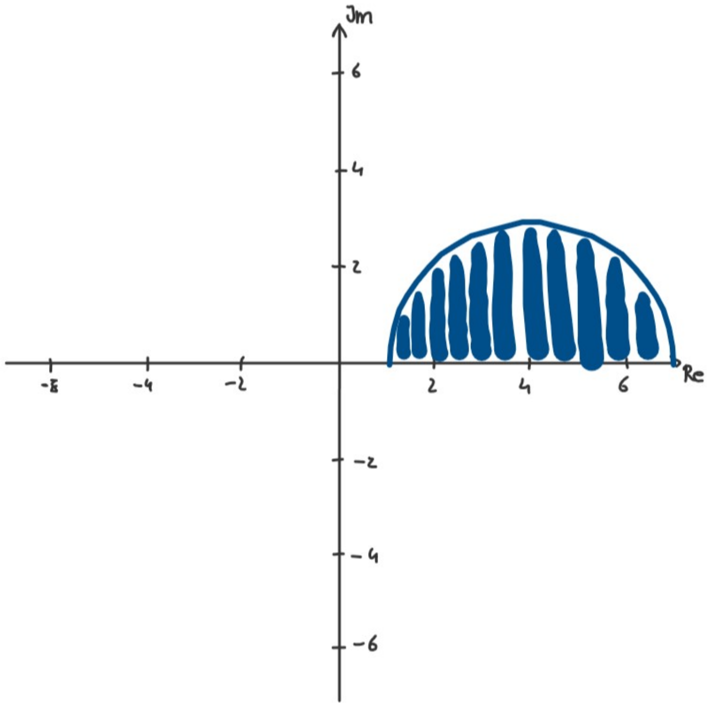

Abbildung 7: $M_7 = \{\frac{|z-i|}{|z+i|} \leq 1 \wedge |z-4| \leq 3\}$

Die erste Bedingung ist äquivalent zu $|z-i| \leq |z+i|$. Dies sind also alle Punkte, deren Abstand zu i kleiner oder gleich ihrem Abstand zu -i ist. Dies trifft auf alle Punkte der oberen Halbebene inklusive der reelen Achse zu. Durch $|z-4| \leq 3$ gehören nur die Punkte der oberen Halbebene zu M_7 die innerhalb sowie auf der Begrenzung der Halbkreisfläche mit Radius 3 um $z = 4$ liegen.

M_8

$M_8 = \{|z| \leq 1 - Re(z)\}$

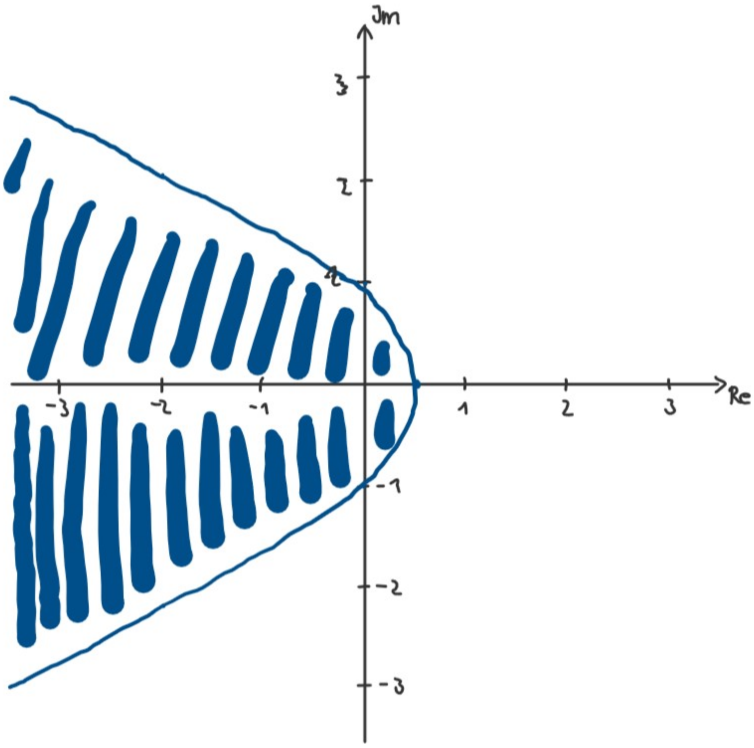

Abbildung 8: $M_8 = \{|z| \leq 1 - Re(z)\}$

Für die Menge M_8 gilt:

$$|z| \leq 1 - Re(z) \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1 - a$$

Daraus folgt direkt $1 - a \geq 0$ und daher $a \geq 1$. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
& a^2 + b^2 \leq 1 - 2a + a^2 \\
& \Leftrightarrow b^2 \leq 1 - 2a \\
& \Leftrightarrow a \leq -\frac{b^2}{2} + \frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow Re(z) \leq -\frac{Im(z)^2}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Die Menge lässt sich also auch definieren als $M_8 = \{Re(z) \leq -\frac{Im(z)^2}{2} + \frac{1}{2}\}$. Es ergibt sich eine Parabelfläche.

4 Mengen

Aufgabe 1)

$$M_1 = \{n \in \mathbb{N} : 1 + (-1)^n\}$$

Es sei $m \in M_1$, also $m = 1 + (-1)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine Fallunterscheidung für gerade und ungerade n:

1. Es sei n gerade $\Rightarrow n = 2j,\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow m = 1 + (-1)^{2j} = 1 + 1^j = 2$
2. Es sei n ungerade $\Rightarrow n = 2j+1,\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow m = 1+(-1)^{2j+1} = 1+(-1)\cdot 1^j = 0$

$m \in M_1$ kann somit nur die Werte 2 oder 0 annehmen. Somit gilt $M_1 = \{0, 2\}$. Daraus folgt: inf(M_1)=min(M_1)=0 sowie sup(M_1)=max(M_1)=2.

Aufgabe 2)

$$M_2 = \left\{n, k \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right\}$$

Es sei $m \in M_2$, also $m = \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$ mit $n, k \in \mathbb{N}$. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \leq 1$ sowie $\frac{1}{k} \leq 1$. Daraus folgt $m = \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \leq 1 + 1 = 2$. Daher gilt also sup($M_2$)=2. Da für $n = k = 1$ gilt $m = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$ folgt sup(M_2)=max(M_2)=2.
Es gilt $\frac{1}{n} > 0$ und $\frac{1}{k}$>0, woraus direkt folgt $m > 0$. 0 ist also eine untere Schranke von M_2. Sei nun $\epsilon > 0$. Nach dem archimedischen Prinzip gibt es nun ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{2}{n} < \epsilon$. Daraus folgt $\epsilon > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = m \in M_2$. ϵ ist somit keine untere Schranke von M_2. 0 ist daher die größte untere Schranke von M_2: inf(M_2). Jedoch gibt es keine $n, k \in \mathbb{N}$ für die gilt $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = 0$. Die Menge M_2 besitzt also kein Minimum.

Aufgabe 3)

$$M_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{61}{81} \geq 0\right\}$$

Es gilt: $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{61}{81} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{25}{81} \geq 0$. Da sowohl $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ als auch $\frac{25}{81} > 0$ gilt, ergibt sich $M_3 = \mathbb{R}$. Somit ist M_3 weder nach oben noch nach unten beschränkt. M_3 hat somit weder ein Infimum noch ein Supremum und somit auch kein Maximum oder Minimum.

Aufgabe 4)

$$M_4 = \{q \in \mathbb{Q} : \ q^2 < 289\}$$

Es gilt: $q^2 < 289 \ \Leftrightarrow \ |q| < 17$. Daher ergibt sich die Menge M_4 als $M_4 = (-17; 17) \cap \mathbb{Q}$. Es ist bekannt, dass inf((-17;17))=-17 und sup((-17;17))=17 gilt. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, folgt direkt inf(M_4)=-17 sowie sup(M_4)=17. Da jedoch gilt -17,17$\notin$(-17;17) und $M_4 \subset (-17; 17)$, besitzt M_4 weder Maximum noch Minimum.

Aufagbe 5)

$$M_5 = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - 3| < 2\} \cup \{0\}$$

Wir betrachten eine Fallunterscheidung für $x \geq 3$ und $x < 3$.

$$x \geq 3 \ \ |x - 3| < 2 \ \Leftrightarrow \ x - 3 < 2 \ \Leftrightarrow \ x < 5$$

$$x < 3 \ \ |x - 3| < 2 \ \Leftrightarrow \ 3 - x < 2 \ \Leftrightarrow \ x > 1$$

Die Menge M_5 ergibt sich somit als $M_5 = (1; 5) \cup \{0\}$. Es ist bekannt, dass sup((1;5))=5 gilt. Daraus folgt sofort sup(M_5)=5. Da jedoch gilt $5 \notin M_5$ besitzt die Menge kein Maximum. Der kleinst Wert den ein $m \in M_5$ annehmen kann ist 0. Es gilt also min(M_5)=0 und daher auch inf(M_5)=0.

Aufgabe 6)

$$M_6 = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1+|x|} \right\}$$

Wir betrachten eine Fallunterscheidung für $x \geq 0$ und $x < 0$

$x \geq 0$

$$\frac{|x|}{1+|x|} = \frac{x}{1+x} = m$$

Da $x \geq 0$ folgt $m \geq 0$ mit $m = 0$ für $x = 0$. Für $x \geq 0$ gilt somit inf(M_6)=min(M_6)=0. Offensichtlich ist m monoton wachsend. Wir betrachten nun den Grenzwert für $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1$$

M_6 ist somit für $x \geq 0$ auch nach oben beschränkt mit sup(M_6)=1. Des weiteren folgt:

$$\frac{x}{1+x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = x+1 \;\lightning$$

M_6 besitzt also kein Maximum für $x \geq 0$.

$x < 0$

$$\frac{|x|}{1+|x|} = \frac{-x}{1-x} = m$$

Es ist $-x > 0$ und daher $m > 0$. Wir betrachten zunächst den Grenzwert $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x}{1-x} = \frac{-0}{1} = 0$$

Offensichtlich ist m monoton wachsend für $x \to -\infty$. Nun betrachten wir den Grenzwert $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{-x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

Somit ist M_6 auch für $x < 0$ nach oben durch 1 und nach unten durch 0 beschränkt. Jedoch gilt wieder

$$\frac{-x}{1-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; -x = -x + 1 \;\lightning$$

Also hat M_6 auch für $x < 0$ kein Maximum.

Insgesamt ergibt sich also für M_6:

1. inf(M_6)=min(M_6)=0
2. sup(M_6)=1

Aufgabe 7)

$$M_7 = \{x \in \mathbb{R} :\; x(2-x) > 1 + |x|\}$$

Es gilt:

$$x(2-x) > 1 + |x| \;\Leftrightarrow\; 0 > 1 + |x| - 2x + x^2 \;\Leftrightarrow\; 0 > (x-1)^2 + |x|$$

Da sowohl $(x-1)^2 \geq 0$ als auch $|x| \geq 0$ ist $M_7 = \emptyset$. Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke der leeren Menge. Daher kann als Bezeichnung für die kleinste obere Schranke $-\infty$ verwendet werden. Es gilt also sup(M_7)=$-\infty$. Gleichermaßen ist auch jedes $x \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke der leeren Menge. Die größte untere Schranke kann somit mit ∞ bezeichnet werden. Die Menge M_7 ist daher beschränkt.

Lösungen Folgen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

a) $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdots n\cdot n} < \dfrac{1\cdot 1\cdot 1\cdots 1\cdot 1}{n\cdot 1\cdot 1\cdots 1\cdot 1} = \dfrac{1}{n} \to 0$

b)

$$\frac{n^2+1}{n-2} - \frac{n^3}{(n+1)(n-3)} = \frac{(n^2+1)(n+1)(n-3) - n^3(n-2)}{(n-2)(n+1)(n-3)} = \frac{n^4-2n^3-2n^2-2n-3-n^4+2n^3}{n^3-4n^2+n+6}$$
$$= \frac{-2n^2-2n-3}{n^3-4n^2+n+6} = \frac{n^3}{n^3}\cdot\frac{-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3}} \to 0$$

c) Nach Proposition 3.11 der Vorlesung gilt $\lim_{n\to\infty} n^k x^n = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0, |x| < 1$. Dann folgt mit $x = \frac{1}{2}$ und $k = 2$ direkt:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Die alternative Lösung mit dem binomischen Lehrsatz sieht wie folgt aus:

$$\left(n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(n^2\cdot\frac{1}{(1+1)^n}\right) = \frac{n^2}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}} < \frac{n^2\cdot 3!\cdot(n-3)!}{n!} = \frac{n^2\cdot 6}{n(n-1)(n-2)}$$
$$= 6\cdot\frac{n}{(n-1)(n-2)} = \frac{n}{n^2-3n+2} \to 0$$

d) Nach Vorlesung gilt $\lim_{x_n\to\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$. Setzen wir $x_n := \frac{1}{n}$, dann folgt für den gegebenen Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\sqrt{n+2}} < \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} \overset{\frac{1}{n}=x_n}{=} \underbrace{\lim_{x_n\to 0} \frac{\sin(x_n)}{x_n}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}}_{=0} = 0$$

Will man das Ganze mit der Regel von L'Hospital lösen, muss man beachten, dass diese nicht auf Folgen anwendbar ist, da nicht nach einer natürlichen Variable differenziert werden kann. Wir ersetzen also

$n \in \mathbb{N}$ durch $x \in \mathbb{R}$ und wenden die Regel an

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x+2}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^2}}{-\frac{x+4}{2x^2\sqrt{x+2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot 2x^2\sqrt{x+2}}{(x+1)^2(x+4)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{4x^5+8x^4}{(x^3+6x^2+9x+4)^2}}}_{\frac{x^{5/2}}{x^3}\to 0(\text{höchste Potenzen})} = 0$$

Offensichtlich stimmt dieser Grenzwert dann mit dem der Folge für $x_n = n$ überein und ist damit auch der gesuchte Grenzwert.

e) $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right) = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n^2}{n^2}\frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$

2. Aufgabe:

a) Da der Cosinus eine Periode von 2π hat, muss hier offensichtlich eine Unterteilung in Teilfolgen für n=1k und n=2k+1 erfolgen. Dann folgt:

- für n=2k: $a_{n_k} = \sqrt[n]{2}\cos(n\pi) = \sqrt[n]{2} \to 1 = \limsup_{n\to\infty} a_n$
- für n=2k+1: $a_{n_k} = \sqrt[n]{2}\cos(n\pi) = (-1)\cdot\sqrt[n]{2} \to -1 = \liminf_{n\to\infty} a_n$

b) i^n, $n \in \mathbb{N}$ kann je nach nach n vier verschiedene Werte annehmen, also treffen wir die folgende Unterteilung:

- für n=4k: $a_{n_k} = \frac{i^n}{3} - \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2} \to \frac{1}{3}$
- für n=4k+1: $a_{n_k} = \frac{i^n}{3} - \frac{1}{3n^2} = \frac{i}{3} - \frac{1}{3n^2} \to \frac{i}{3}$
- für n=4k+2: $a_{n_k} = \frac{i^n}{3} - \frac{1}{3n^2} = \frac{-1}{3} - \frac{1}{3n^2} \to -\frac{1}{3}$
- für n=4k+3: $a_{n_k} = \frac{i^n}{3} - \frac{1}{3n^2} = \frac{-i}{3} - \frac{1}{3n^2} \to -\frac{i}{3}$

3. Aufgabe:

a) Wir wenden das Cauchy-Kriterium der Konvergenz an. Dabei sei o.B.d.A. m>n:

$$\begin{aligned}|a_{m+1}-a_{n+1}| = |\frac{1}{2}a_m+1-\frac{1}{2}a_n-1| = \frac{1}{2}|a_m-a_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{m-1}-a_{n-1}|\\ = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^n|a_{m-n+1}-a_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n|a_{m-n+1}-1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n|\frac{1}{2}a_{m-n}+1-1|\\ = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a_{m-n}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \epsilon\end{aligned}$$

für hinreichend großes N und m,n>N. $\Rightarrow$ *Konvergenz*

Dabei wurde verwendet, dass die Folge betragsmäßig durch 2 beschränkt ist. Dies lässt sich leicht durch Induktion zeigen:

Offensichtlich gilt $a_n > 0$ für alle n, da $a_1 > 0$. Außerdem folgt:

Induktionsanfang: $a_1, a_2 < 2$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n < 2$

Induktionsbehauptung: Es gilt auch $a_{n+1} < 2$

Beweis: $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 < \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$

$\Rightarrow$ Die Folge ist nach oben durch 2 beschränkt.

Der Grenzwert berechnet sich wegen $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$ durch $a = \frac{1}{2}a + 1$ und hat den Wert $a = 2$.

b) Es ist bekannt, dass $0 < a_1 < \frac{1}{x}$. Damit folgt für alle Folgenglieder:
$a_{n+1} - \frac{1}{x} = 2a_n - x \cdot a_n^2 - \frac{1}{x} = -x(a_n^2 - 2\frac{a_n}{x} + \frac{1}{x^2}) = -x(a_n - \frac{1}{x})^2 < 0 \Rightarrow a_n < \frac{1}{x}\ \forall n \in \mathbb{N}$ und
$a_{n+1} = 2a_n - xa_n^2 > 2a_n - a_n x \cdot \frac{1}{x} = a_n > 0$. Die Folge ist also zwischen 0 und $\frac{1}{x}$ beschränkt.

Sie ist außerdem monoton wachsend nach
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n(2 - xa_n)}{a_n} = 2 - xa_n > 2 - 1 = 1.$
Da die Folge also beschränkt und monoton ist, folgt Konvergenz.

Der Grenzwert berechnet sich wieder nach $a = a(2 - x \cdot a)$ und hat den Wert $a = \frac{1}{x}$.

c) Betrachten der Differenz $a_{k+1} - a_k$ liefert:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} - a_k &= \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1}) - a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} - a_k) = -\frac{1}{2}(a_k - a_{k-1}) \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k-2}) - a_{k-1}) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a_{k-2} - a_{k-1})) \\
&= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}(a_{k-1} - a_{k-2})) = (-\frac{1}{2})^2(a_{k-1} - a_{k-2}) \\
&= \ldots = (-\frac{1}{2})^k(b-a)
\end{aligned}$$

Dann kann man sich eine Teleskopreihe wie folgt definieren:

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a + \sum_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2})^k(b-a)$$

Jetzt lässt sich der Grenzwert mithilfe der geometrischen Reihe bestimmen:

$$a + \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^k(b-a) = a + (b-a)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(2b+a)$$

4. Aufgabe:

Die Folge divergiert für den Startwert $a_1 = 2 > 1$. Es folgt $a_2 = \frac{1+2^2}{2} = \frac{5}{2} > 2$. Nutzt man das Prinzip der Induktion mit der Voraussetzung $a_n > n$, dann folgt $\forall n \geq 2$:

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2} > \frac{1+n^2}{2} \geq \frac{1+2n}{2} = n + \frac{1}{2} > n$$

$\Rightarrow$ Divergenz.

Die Folge konvergiert für $a_1 = \frac{1}{2}$. Es gilt offensichtlich $a_n > 0$ und $a_1 < 1$. Dann folgt mittels Induktion $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$, also gilt $0 < a_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Ähnlich folgt aus $a_2 > a_1$:
$a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}^2}{2} > \frac{1+a_n^2}{2} = a_{n+1} \Rightarrow$ monoton wachsend
Aus Monotonie und Beschränktheit folgt Konvergenz und der Grenzwert ist 1.

5. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig? Finde für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel.

✓ Kovergieren die Teilfogen $(a_{2n}), (a_{2n+1})$ und (a_{3n}) einer Zahlenfolge (a_n), so konvergiert auch die Folge (a_n) selbst.

Begründung: Sei $\lim_{n\to\infty} a_{3n} := a$. Es lassen sich nun folgende Teilfolgen von a_{3n} konstruieren:

$a_{6n} \subset a_{2n}$ und $a_{6n+3} \subset a_{2n+1}$. Diese Teilfolgen konvergieren nun ebenfalls gegen a und demnach auch die Folgen a_{2n} und a_{2n+1}. Da $(a_{2n}) \cup (a_{2n+1})$ gerade alle Folgenglieder von a_n enthält, gilt also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

× Jede beschränkte Folge ist kovergent.

Gegenbeispiel: $(-1)^n$

× Eine Folge, die nur positive Folgenglieder hat und gegen Null kovergiert, ist stets monoton fallend.

Gegenbeispiel: $\frac{2+(-1)^n}{n}$: Die ersten Folgenglieder sind: $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ nicht monoton.

× Seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen. Gilt $a_n \to 0$, so gilt für eine beliebige Folge (b_n), dass $a_n \cdot b_n \to 0$.

Gegenbeispiel: $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$, dann ist $a_n b_n = 1$.

✓ $\forall \epsilon > 0$ existieren nur endlich viele k mit $\mid a_k - c \mid > \epsilon$. $\Rightarrow$ Die Folge (a_k) konvergiert gegen c.

Begründung: Anders formuliert steh hier: $\forall \epsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} : \; |a_k - c| < \epsilon \; \forall k > K$ und das ist gerade die Definition der Konvergenz.

× Liegen in jeder ϵ-Umgebung um c unendlich viele Folgenglieder der Folge (a_n), so konvergiert diese gegen c.

Gegenbeispiel: $(-1)^n$, hier liegen zwar unendlich viele Folgenglieder in jeder Umgebung von 1 (oder -1), für die Konvergenz ist jedoch nötig, dass *fast alle* (also alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in der Umgebung liegen.

× Jede konvergente Folge ist monoton.

Gegenbeispiel: $(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$, aber ist nicht monoton.

✓ Sei (a_n) eine kovergente Zahlenfolge und (b_n) eine beschränkte Zahlenfolge, so hat die Zahlenfolge $(a_n b_n)$ mindestens einen Häufungspunkt.

Begründung: Da (b_n) beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge (b_{n_k}) mit Grenzwert b_0. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n := a$, dann existiert auch der Grenzwert von $(a_{n_k} b_{n_k})$ und es gilt: $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} = a \cdot b_0$. Da $(a_{n_k} b_{n_k})$ Teilfolge von $(a_n b_n)$ ist $a \cdot b_0$ Häufungspunkt der Folge $(a_n b_n)$.

Lösungen zu Reihen

Bemerkung: In eurem Skript habt ihr zwei äquivalente Varianten der Konvergenzkriterien für Reihen kennengelernt.
Zur Wiederholung: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben. So kann man mit dem Quotientenkriterium zeigen, dass falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\theta \in (0,1)$ gibt, so dass $a_n \neq 0, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$ ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut (Satz 5.12).
Äquivalent kann gezeigt werden, dass $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ist. In den nachfolgenden Lösungen werdet ihr beide Varianten sehen.

1. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2020}}{2020^n}$

Nach dem Wurzelkriterium ist $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^{2020}}{2020^n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2020}}{2020^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{2020}}}{\sqrt[n]{2020^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{2020}}}{2020} = \frac{1}{2020}$. Also ist $\alpha < 1$. $\Rightarrow$ Reihe konvergiert.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$

Da $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ konvergiert, ist das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt.
Die Reihe divergiert.

(Bemerkung: $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ wurde in Serie 7, Aufgabe 2 gezeigt.)

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2-1}$

Anwendung des Leipnitzkriteriums liefert Konvergenz der Reihe:
Betrachte $a_n = \frac{2n+1}{n^2-1} = \frac{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \Rightarrow a_n \to 0, n \to \infty$. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Des Weiteren ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge, d.h. es gilt $a_n \geq a_{n+1}$:
$\frac{2n+1}{n^2-1} \geq \frac{2n+3}{(n+1)^2-1} \Leftrightarrow (2n+1)((n+1)^2-1) \geq (2n+3)(n^2-1) \Leftrightarrow 2n^2+4n \geq -3$.
Dies ist eine wahre Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3}$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\left|\frac{2^{k+1}}{(k+1)^3}\frac{k^3}{2^k}\right| = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^3 < 2$. Damit divergiert die Reihe.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Nach dem Wurzelkriterium ist $\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$. Damit konvergiert die Reihe.

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)+1}{n^2}$

Es ist $\left|\frac{cos(n)+1}{n^2}\right| = \frac{|cos(n)+1|}{n^2} \leq \frac{|cos(n)|+|1|}{n^2} \leq \frac{1+1}{n^2}$, da $|cos(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konvergent ist, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)+1}{n^2}$ nach dem Majorantenkriterium.

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{6n+2}\right)^{(-1)^n n}$

Fallunterscheidung

1.Fall: n ist gerade: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{6n+2}\right)^n$

Anwendung des Wurzelkriterums liefert: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+2}{6n+2}\right)^n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n+2}{6n+2}\right) = \limsup\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n\left(5+\frac{2}{n}\right)}{n\left(6+\frac{2}{n}\right)}\right) = \frac{5}{6} < 1.$

2.Fall: n ist ungerade: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{6n+2}\right)^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6n+2}{5n+2}\right)^n$

Analoges Anwenden des Wurzelkriteriums liefert: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{6n+2}{5n+2}\right)^n} = \frac{6}{5} > 1.$

Damit divergiert die Reihe, da sie zwei unterschiedlich große Häufungspunkte besitzt.

(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n}$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n^3}\right| = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{e} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = e^{-1}$. Da $\alpha < 1$ ist, konvergiert die Reihe.

Untersuche die Reihe aus 1c) auf absolute Konvergenz!

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2-1}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2-1}.$

Außerdem ist $\frac{2n+1}{n^2-1} \geq \frac{2n}{n^2-1} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ divergiert (harmonische Reihe).

Damit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2-1}$ nicht absolut nach dem Minorantenkriterium.

3. Die folgenden Reihen konvergieren. Bestimme den Grenzwert der Reihen!

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4.$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

(Tipp zu (b): Betrachte zunächst $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.)

Zunächst ist $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Demnach ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

4. Gegeben ist $x = 0,\overline{02}$. Bestimme die dazugehörige rationale Zahl $x = \frac{p}{q}, p, g \in \mathbb{N}$ im Dezimal- und Dualsystem!

(Stichwort: b-adischer Bruch)

Eine reelle Zahl x kann allgemein in der Form $x = \pm \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$ mit beliebiger Basis b ($b \geq 2$) geschrieben werden.

Im Dualsystem ist $b = 2$ und im Dezimalsystem ist $b = 10$. Da $x = 0,\overline{02}$ ist, folgt $a_k = \begin{cases} 2, \text{ 2k gerade} \\ 0, \text{ k ungerade} \end{cases}$

Somit ist nun im Dezimalsystem $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 10^{-2k} = 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^{k+1} = 2 \cdot \frac{1}{100} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{50} \cdot \frac{100}{99} = \frac{2}{99}$.

Analog ist dann im Dualsystem $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-2k} = 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} = 2 \cdot \frac{1}{4} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

5.Untersuche folgende Reihen in $\mathbb{C}$ auf Konvergenz!

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7i}{10}\right)^n$

Die Reihe konvergiert (absolut): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\left(\frac{7i}{10}\right)^n\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{7i}{10}\right|^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{7}{10}} = \frac{10}{3}$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3+4i)^n$

Anwendung des Quotientenkriteriums liefert Divergenz der Reihe:
$\left|\frac{(3+4i)^{n+1}}{(3+4i)^n}\right| = |3+4i| = 5 > 1$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^4}$

Diese Reihe konvergiert (absolut): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{e^{in}}{n^4}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$konvergiert $\left(|e^{in}| = 1, \forall n \in \mathbb{N}\right)$.

Lösungen Funktionen

1. Aufgabe:

Damit eine Funktion in einem Punkt stetig ist, muss der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle existieren und mit dem Funktionswert an der Stelle übereinstimmen. Damit ein Grenzwert existiert, muss der rechts- und linksseitige Grenzwert übereinstimmen. Also muss gelten:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

a) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt aufgrund der Definition:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0 \tag{2}$$

Wir betrachten 3 Fälle:

1. $\alpha = 0$

   Man erhält die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ x \leq 0 \\ 1 & f\ddot{u}r\ x > 0 \end{cases}$, eine offensichtlich unstetige Funktion.

2. $\alpha > 0$

   Für alle $\alpha > 0$ gilt, dass $f(0) = 0$, da das α fest ist. Wir müssen also lediglich den rechtsseitigen Grenzwert betrachten:

   $$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0 \tag{3}$$

   Damit existiert der Grenzwert und stimmt mit dem Funktionswert überein, also ist g im Nullpunkt stetig.

3. $\alpha < 0$

   Für $x > 0$ ist $f(x) = x^\alpha = \frac{1}{x^{|\alpha|}}$. Wir haben oben bereits gezeigt, dass $\lim_{x \to 0+} x^{|\alpha|} = 0$ und das können wir umformulieren: Wir betrachten das ganze jetzt als Folge $a_n = x_n^{|\alpha|}$, für die gilt: $x_n^{|\alpha|} \to 0$ $(n \to \infty)$. Da alle Folgenglieder größer 0 sind, folgt aus der VL, dass das Reziproke $\frac{1}{x_n^{|\alpha|}}$ für $n \to \infty$ divergiert und damit auch der Grenzwert $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x_n^{|\alpha|}}$. Also existiert der rechtsseitige Grenzwert nicht und f ist für $\alpha < 0$ unstetig im Nullpunkt.

b) Zuerst bestimmt man die Umkehrfunktion durch Umstellen der Funktionsgleichung nach x:

$$y = x^{\alpha} \leftrightarrow y^{\frac{1}{\alpha}} = x \quad (y > 0) \tag{4}$$

Also ist unsere Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = g(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$. Diese Funktion existiert nur für $x > 0$, denn für $y < 0$ ist Gleichung (4) nicht definiert. Es gilt also $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$. Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion erhält man aus der VL:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))} \tag{5}$$

Alle Voraussetzungen sind erfüllt: f ist in $x_0 = 2$ differenzierbar und $f'(2) = \alpha \cdot 2^{\alpha-1} \neq 0$. Also rechnen wir aus:

$$g'(2^{\alpha}) = \frac{1}{f'(g(y_0))} = \frac{1}{f'(g(2^{\alpha}))} = \frac{1}{f'(2^{\alpha\cdot(\frac{1}{\alpha})})} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\alpha \cdot 2^{\alpha-1}} \tag{6}$$

2. Aufgabe:

Stetigkeit: Die Sinus-Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ ist eine stetige Funktion, ebenso wie $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^{\alpha}$ eine stetige Potenzfunktion mit reellem Exponenten ist. g_{α} ist also stetig, da die Hintereinanderausführung $s \circ p$ zweier stetiger Funktionen stetig ist.

Differenzierbarkeit: Dafür betrachten wir die Funktion zweigeteilt:

$$g_{\alpha}(x) = \begin{cases} \sin(x^{\alpha}) & f\ddot{u}r\ x \geq 0 \\ \sin((-x)^{\alpha}) & f\ddot{u}r\ x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion differenzierbar, die Ableitung lautet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin(|x|^{\alpha}) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \cdot \cos(x^{\alpha}) & f\ddot{u}r\ x \geq 0 \\ -\alpha(-x)^{\alpha-1} \cdot \cos((-x)^{\alpha}) & f\ddot{u}r\ x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin(x^{\alpha}) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \cos(x^{\alpha}) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} x^{\alpha} = \cos(x^{\alpha}) \cdot \alpha x^{\alpha-1} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin((-x)^{\alpha}) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \cos((-x)^{\alpha}) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(-x)^{\alpha} = \cos(x^{\alpha}) \cdot \alpha(-x)^{\alpha-1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(-x) = -\alpha x^{\alpha-1} \cdot \cos((-x)^{\alpha}) \tag{10}$$

Im Punkt $x_0 = 0$ betrachten wir den Differentialquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(|h|^{\alpha}) - \sin(0)}{h} \tag{11}$$

Man unterteilt zwei Fälle, $h < 0$ und $h > 0$:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\sin(h^\alpha) - \sin(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sin(h^\alpha)}{h} \overset{\text{L'Hosptial}}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{\alpha h^{\alpha-1}\cos(h^\alpha)}{1} = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ \alpha > 1 \\ \alpha & f\ddot{u}r\ \alpha = 1 \\ \text{nicht existent} & f\ddot{u}r\ \alpha < 1 \end{cases} \tag{12}$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{\sin((-h)^\alpha) - \sin(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\sin((-h)^\alpha)}{h} \overset{\text{L'Hosptial}}{=}$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{-\alpha(-h)^{\alpha-1}\cos((-h)^\alpha)}{1} = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ \alpha > 1 \\ -\alpha & f\ddot{u}r\ \alpha = 1 \\ \text{nicht existent} & f\ddot{u}r\ \alpha < 1 \end{cases} \tag{13}$$

Daran kann man ablesen, dass der Differentialquotient nur für $\alpha > 1$ existiert und übereinstimmt, als ist g_α für $\alpha > 1$ differenzierbar.

3. Aufgabe:

a) Die Funktion h_a ist für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ stetig, denn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig, und damit ebenso $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f + c$ ($c \in \mathbb{R}, c = const.$). Weiterhin gilt für stetige Funktionen f_2, f_a, dass auch $\dfrac{f_2}{f_a}$ stetig ist. (Falls $f_a \neq 0$, ist erfüllt für $a > 0$)

Untersuchen wir jetzt die Stetigkeit in $x_0 = 0$. Falls ein solches b existiert, muss gelten: $\lim_{x\to 0+} h_a(x) = \lim_{x\to 0-} h_a(x) = b$. Man überprüft:

$$\lim_{x\to 0-} h_a(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|+2}{|x|+a} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x+2}{-x+a} = \frac{2}{a} \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0+} h_a(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|+2}{|x|+a} = \lim_{x\to 0+} \frac{x+2}{x+a} = \frac{2}{a} \tag{15}$$

Da rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen, ist für alle $a > 0$, $b := \frac{2}{a}$ die Funktion $h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|+2}{|x|+a} & f\ddot{u}r\ x \neq 0 \\ \dfrac{2}{a} & f\ddot{u}r\ x = 0 \end{cases}$ im gesamten Definitionsbereich stetig.

b) Für a=0 ist die Funktion $h_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|x|+2}{|x|} = 1 + \frac{2}{|x|}$ für alle $x \neq 0$ definiert. Wir untersuchen die Existenz der einseitigen Grenzwerte im Nullpunkt. Man kann vermuten, dass die Grenzwerte im Nullpunkt nicht existieren, d.h. wir probieren mittels Folgenkriterium ein Gegenbeispiel zu finden.

Zuerst betrachten wir den rechtsseitigen Grenzwert und wählen die Folge $x_n := \dfrac{1}{n}$, es gilt $x_n \to 0\,(n \to \infty)$. Damit folgt auch

$$\lim_{x\to 0+} h_0(x) = \lim_{n\to\infty} h_0(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{\frac{1}{n}} = 1 + \lim_{n\to\infty} 2n \text{ existiert nicht!} \tag{16}$$

Da schon der rechtsseitige Grenzwert im Nullpunkt nicht existiert, kann h_0 im Nullpunkt nicht stetig sein.

c) Für $x \neq 0$ ist die Funktion differenzierbar, es gilt

$$h'_a(x) = \begin{cases} \dfrac{a-2}{(x+a)^2} & f\ddot{u}r\ x > 0 \\ \dfrac{2-a}{(a-x)^2} & f\ddot{u}r\ x < 0 \end{cases} \tag{17}$$

denn mit der Quotientenregel erhält man für $x > 0$:

$$\left(\frac{x+2}{x+a}\right)' = \frac{1 \cdot (x+a) - (x+a) \cdot 1}{(x+a)^2} = \frac{a-2}{(x+a)^2} \tag{18}$$

und für $x < 0$:

$$\left(\frac{-x+2}{-x+a}\right)' = \frac{-1 \cdot (-x+a) - (-x+2) \cdot (-1)}{(-x+a)^2} = \frac{2-a}{(-x+a)^2} \tag{19}$$

Den Punkt $x = 0$ muss man gesondert betrachten. Voraussetzung ist Stetigkeit, welche wir bereits im Punkt a) gezeigt haben. Schauen wir uns den Differentialquotienten an:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(0+h) - h(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{|h|+2}{|h|+a} - \frac{2}{a}}{h} \tag{20}$$

Wir betrachten 2 Fälle, $h > 0$ und $h < 0$:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\frac{|h|+2}{|h|+a} - \frac{2}{a}}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\frac{h+2}{h+a} - \frac{2}{a}}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\frac{(h+2) \cdot a - 2 \cdot (h+a)}{(h+a) \cdot a}}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{ha + 2a - 2h - 2a}{h^2 a + ha^2} \tag{21}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(a-2)}{h(ha + a^2)} = \frac{a-2}{a^2} \quad \text{und} \tag{22}$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{\frac{|h|+2}{|h|+a} - \frac{2}{a}}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\frac{-h+2}{-h+a} - \frac{2}{a}}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{\frac{(-h+2) \cdot a - 2 \cdot (-h+a)}{(-h+a) \cdot a}}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-ha + 2a + 2h - 2a}{-h^2 a + ha^2} \tag{23}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{h(-a+2)}{h(-ha + a^2)} = \frac{-a+2}{a^2} \tag{24}$$

Die beiden Fälle stimmen nicht überein, also existiert der Differentialquotient (19) nicht und h_a ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Daraus kann man folgern: Stetigkeit ist ein notwendiges Kriterium für Differenzierbarkeit, aber kein hinreichendes.

4. Aufgabe:

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Falls wahr, begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel an, falls die Aussage falsch ist.

- *Jede stetige Funktion auf dem Intervall* $(1, 2)$ *ist beschränkt.*

  falsch, dazu betrachte man ein Gegenbeispiel, z.B. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

- *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subseteq \mathbb{R}$ *eine monotone Funktion. Dann besitzt f eine Umkehrfunktion.*

  falsch, denn f muss injektiv und zum Beispiel *streng* monoton sein.

  (Gegenbeispiel: $f(x) = [x]$ (Gaußklammer bzw. Floor-Funktion)

- *Jede stetige Funktion nimmt auf* $[0, 1]$ *ihr Maximum an.*

  richtig, folgt aus dem Satz vom Maximum und Minimum (beachte hierbei das kompakte Intervall).

- *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ *ist stetig.*

  richtig, denn 1 und x sind stetige Funktionen. Daraus folgt, dass auch $\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ stetig ist, was genau dem Definitionsbereich entspricht. Also ist f auf dem Definitionsbereich stetig.

5. Aufgabe:

Kreuze an, was richtig ist. (Mehrfachantworten möglich)

- Welche Behauptungen für reelle Funktionen sind richtig?

  ✓ *Die Summe zweier stetiger Funktionen ist immer stetig.*

  Folgt aus VL.

  × *Die Summe zweier unstetiger Funktionen ist immer unstetig.*

  Unstetigkeitsstellen können sich aufheben. Ist z.B. f eine unstetige Funktion, dann ist auch $-f$ unstetig, aber $f + (-f) \equiv 0$ ist eine stetige Funktion.

  ✓ *Die Summe einer stetigen und einer unstetigen Funktion ist stets unstetig.*

  Angenommen, die Aussage ist falsch: betrachte eine stetige Funktion f und eine unstetige Funktion g, so könnte $f + g$ auch stetig sein. Dann müsste allerdings auch $f + g + (-f) = g$ stetig sein. $\lightning$

  ✓ *Das Produkt einer stetigen und einer unstetigen Funktion kann stetig sein.*

  z.B. kann jede unstetige Funktion f mit der stetigen Funktion $g \equiv 0$ multipliziert werden und man erhält $f \cdot g \equiv 0$ (stetig).

- $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist

✓ stetig

✓ differenzierbar

✓ monoton

✓ injektiv

× surjektiv

Thema: Beweise

1. Aufgabe: (*Folgen und Reihen*)

(a) Es sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeige, dass $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge ist.

(b) Sei $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{1}{a_1 + \ldots + a_n}$. Zeige, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n > 0$ und $b_n > 0$. Außerdem sei $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ für $n \to \infty$. Zeige nun:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert genau dann, wenn } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert.}$$

2. Aufgabe: (*Funktionen*)

Zeige, dass die Funktion $f(x) := sin(x) - e^{-x}$ im abgeschlossenem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle besitzt.

(Hinweis: Nutze den Zwischenwertsatz)

3. Aufgabe: (*Wahr oder Falsch*)

Welche Aussagen treffen zu? Beweise oder widerlege mit einem selbstgewähltem Gegenbeispiel:

(a) Jede beschränkte Folge ist auch konvergent.

(b) Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

(c) Sei (a_n) eine beliebige Folge und (b_n) eine beschränkte Folge. Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent, dann ist auch } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konvergent.}$$

Lösungen

1. Aufgabe

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Da (b_n) beschränkt ist, existiert ein C, sodass $|b_n| < C$ für alle n. Nun ist die Folge (a_n) eine Nullfolge, also existiert ein n_0, sodass gilt: $|a_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ für $n \geq n_0$. Insgesamt erhält man dann:

$$|a_n \cdot b_n| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

Damit ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

(b) Zunächst ist $a_n > 0$ für alle n. Ist nämlich $a_i > 0$ für alle $i < n$, so ist auch

$$a_n = \frac{1}{a_1 + ... + a_{n-1}} > 0. \qquad (*)$$

Nun schreiben wir a_{n+1} nur in Abhängigkeit von a_n und erhalten mit Hilfe von $(*)$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_1+...+a_{n-1}} + a_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + a_n} \qquad (**)$$

Wegen $a_n > 0$ folgt dann $\frac{1}{a_n} + a_n > \frac{1}{a_n}$ und damit insgesamt $a_{n+1} < a_n$. Die Folge ist also monoton fallend. Außerdem ist (a_n) nach unten beschränkt also konvergent durch eine Zahl $a \geq 0$.

Es bleibt zu zeigen: $a = 0$:
Da die Folge (a_n) gegen einen Grenzwert a konvergiert, können wir in $(**)$ einsetzen $(n \to \infty)$ und erhalten:

$$a = \frac{1}{\frac{1}{a} + a} \Leftrightarrow a \cdot \left(\frac{1}{a} + a\right) = 1 \Leftrightarrow 1 + a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

Also ist die Folge monoton fallen und konvergent gegen den Grenzwert $a = 0$.

(c) Wenn $\frac{a_n}{b_n}$ gegen 1 konvergiert, dann gibt es ein N_1, so dass $\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2}$ für $n \geq N_1$ ist. Deshalb ist nach Umstellen: $b_n < 2 \cdot a_n$ für $n \geq N_1$. Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent, so ist nach dem Majorantenkriterium auch } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergent. Analog existiert ein N_2, so dass $\frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$ für $n < N_2$ ist. Also $a_n < 3 \cdot \frac{b_n}{2}$. Entsprechend ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent, wenn } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert.}$$

2. Aufgabe

Es gilt $f(0) = \sin(0) - e^0 = -1 < 0$ und $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\frac{\pi}{2}) - e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$. Da jetzt $[0, \frac{\pi}{2}]$ ein abgeschlossenes Intervall und f als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig ist, kann der Zwischenwertsatz genutzt werden: Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommen, es existiert also eine Nullstelle. Um die Eindeutigkeit nachzuweisen, zeigt man, dass f streng monoton wachsend ist. Es gilt:

$$f^{'}(x) = cos(x) + e^{-x} > e^{-x} > 0, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

3. Aufgabe

(a) Falsch. Gegenbeispiel: $(-1)^n$

(b) Richtig. Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $(a_n) \to a$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für zwei beliebige Folgenglieder a_n, a_m mit $n, m \geq n_0$ gilt daher mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(c) Falsch. Gegenbeispiel: Wähle $(a_n) = \frac{(-1)^n}{n}$ und $(b_n) = (-1)^n$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

konvergiert, während die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.
Ein anderes Beispiel wäre $(a_n) = \frac{(-1)^n}{1+n}$ und $(b_n) = (-1)^n$.

(Hinweis: Die Aussage wäre richtig, wenn (b_n) beschränkt und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut** konvergieren würde. Dann wäre sogar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ absolut konvergent)